以 $\angle CAB = 30^\circ = \angle ACB$，可得 $BA = BC$，易得 $CD = CB$，则 $\triangle ACD \cong \triangle ACB$，可得 $AD = AB$，所以 $AD = AB = CD = CB$，从而得出四边形 $ABCD$ 为菱形。

评析：本题未采用反证法，而是结合圆、三角形等平面图形的性质，通过求出各边的关系，证明了四边形 $ABCD$ 为菱形。

三、类比迁移型几何问题

类比迁移型几何问题较为特殊，主要考查学生的观察能力、逻辑推理能力及知识灵活运用能力。解题时，需先读懂并理解已知信息，再挖掘其与所求问题间的关系，进而灵活运用相关知识求解。其中，挖掘关系是重点也是难点，需要学生具备较强的逻辑思维能力及想象能力。

[**例3**]（1）如图6，在矩形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在边 DC，BC 上，$AE \perp DF$，垂足为 G，求证 $\triangle ADE \backsim \triangle DCF$。

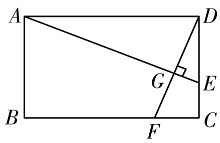

图6

（2）如图7，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在边 DC，BC 上，$AE = DF$，延长 BC 到点 H，使 $CH = DE$，连接 DH，求证：$\angle ADF = \angle H$。

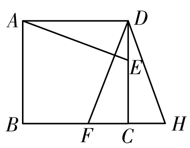

图7

（3）如图8，在菱形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在边 DC，BC 上，$AE = DF = 11$，$DE = 8$，$\angle AED = 60^\circ$，求 CF 的长。

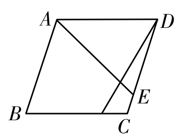

图8

解析：（1）由题目条件易证 $\triangle ADE \backsim \triangle DCF$，过程略。

（2）如图7，因为 $AD = CD$，$AE = DF$，所以 $Rt\triangle ADE \cong Rt\triangle DCF$，则有 $DE = CF$；由 $CH = DE$，得 $CH = CF$，所以 $Rt\triangle DCF \cong Rt\triangle DCH$，则有 $\angle DFC = \angle H$，由 $AD // BC$，得 $\angle ADF = \angle DFC$，所以 $\angle ADF = \angle H$。

（3）如图9，延长 BC 至点 G，使 $CG = DE = 8$，连接 DG，易证 $\triangle ADE \cong \triangle DCG$，得 $\angle DGC = \angle AED = 60^\circ$，$AE = DG$，由 $AE = DF$ 得 $DG = DF$，所以 $\triangle DFG$ 是等边三角形，得 $FG = DF = 11$，从而得 $CF = FG - CG = 11 - 8 = 3$。

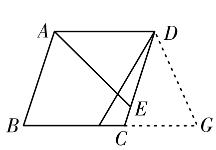

图9

评析：本题从矩形问题、正方形问题逐步迁移到菱形问题，难点在于挖掘不同图形问题的内在联系，并以此为依托进行解题。

四、规律探究型几何问题

规律探究型几何问题的基本特征是给出特殊情况，然后通过推导、猜想、证明得出一般结论。解答这类问题时，需先从特殊条件出发，运用归纳、类比方法推导出一般结论，进而解决问题。

[**例4**]小红同学在学习正方形知识后开展了以下探究活动：在正方形 $ABCD$ 的边 BC 上任意取一点 G，以 BG 为边长向外作正方形 $BEFG$，将正方形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转。

（1）当 BG 在 BC 上时，连接 DF，与 AC 相交于点 P，小红发现点 P 恰好为 DF 的中点，如图10。针对小红的发现，请给出证明。

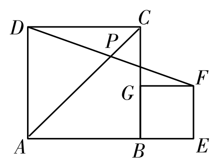

图10

（2）小红继续连接 EG，并延长与 DF 相交，发现交点恰好为 DF 的中点 P，如图11。根据小红的发现，试判断 $\triangle APE$ 的形状。

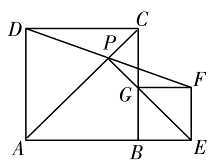

图11

（3）如图12，将正方形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转 α，连接 DF，点 P 是 DF 的中点，连接 AP，EP，AE，$\triangle APE$ 的形状是否发生改变？

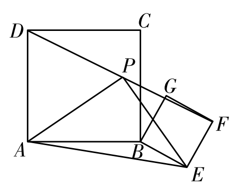

图12

解析：（1）如图13，连接 BD，BF，BP，由正方形的性质可得 $\angle DBF = 90^\circ$，$\triangle APD \cong \triangle APB$，所以 $BP = DP$，进而得 $\angle PDB = \angle PBD$，由等角的余角相等可得 $\angle PBF = \angle PFB$，所以 $PB = PF$，从而 $PD = PF$。

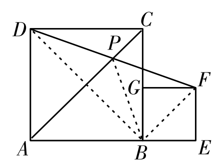

图13

（2）如图11，由正方形可得 $\angle CAE = \angle PEA = 45^\circ$，所以 $\triangle APE$ 是等腰直角三角形。

（3）如图14，延长 EP 至点 M，使 $PM = PE$，连接 MA，MD，易证 $\triangle MPD \cong \triangle EPF$，则有 $DM = EF$，$\angle DMP = \angle PEF$，所以 $BG // DM$。

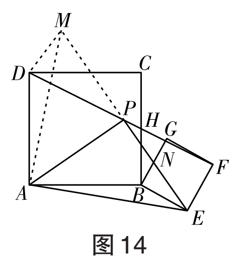

图14

设 DF 交 BC 于点 H，交 BG 于点 N，则 $\angle MDN = \angle DNB$，由 $AD // BC$，得 $\angle ADN = \angle BHN$，进而得出 $\angle ADM = \angle BHN + \angle BNH = 180^\circ - \angle HBN = \angle ABE$，所以 $\triangle ADM \cong \triangle ABE$，进而得出等腰直角三角形

AEM,由P是EM的中点,得等腰直角三角形APE,故$\triangle APE$形状不变,仍为等腰直角三角形。

评析:本题难点在于第(3)问,需借助辅助线,利用中点构造全等三角形来解题。解答这类问题时,应结合条件,灵活观察与类比。

五、实践操作型几何问题

实践操作型几何问题常与实践操作相联系,如课堂上的探究性活动、身边的探究性用具等。常见的命题情境是给出条件,让学生挖掘内涵,探究解题思路或方法。

[例5][问题情境]两位同学用相同的两块含30°的三角板开展数学探究活动,两块三角板分别记作$\triangle ADB$和$\triangle A'D'C$,$\angle ADB=\angle A'D'C=90^\circ$,$\angle B=\angle C=30^\circ$,设$AB=2$。

[操作探究]如图15,先将$\triangle ADB$和$\triangle A'D'C$的边AD,$A'D'$重合,再将$\triangle A'D'C$绕着点A按顺时针方向旋转,旋转角为$\alpha(0^\circ\leqslant\alpha\leqslant360^\circ)$,旋转过程中$\triangle ADB$保持不动,连接$BC$。

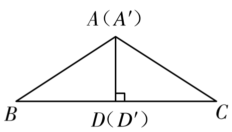

图15

(1)当$\alpha=60^\circ$时,$BC=$_________;当$BC=2\sqrt{2}$时,$\alpha=$_________。

(2)当$\alpha=90^\circ$时,画出图形,并求两块三角板重叠部分图形的面积。

解析:(1)当$\alpha=60^\circ$时,$A'C$与AD重合,易得$\triangle ABC$为等边三角形,如图16,所以$BC=AB=2$;当$BC=2\sqrt{2}$时,由勾股定理可得$\angle BAC=90^\circ$,即$AB\perp AC$。

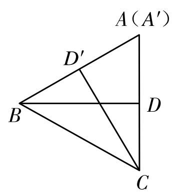

图16

后续则要分两种情况进行讨论,如图17,$\angle DAC=\angle BAC-\angle BAD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$,此时$\alpha=\angle DAD'=\angle CAD'-\angle DAC=60^\circ-30^\circ=30^\circ$,如图18,$\angle DAB=\angle D'AC=60^\circ$,此时$\alpha=\angle DAB+\angle BAC+\angle D'AC=210^\circ$。

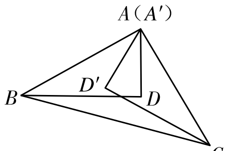

图17

综上,当$BC=2\sqrt{2}$时,$\alpha=30^\circ$或210°。

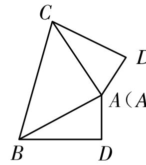

图18

(2)当$\alpha=90^\circ$时,可得图19,易得正方形$ADED'$为正方形,则$AD=DE=D'E=1$,所以$BE=BD-DE=\sqrt{3}-1$,进而得$EF=BE\times\tan\angle ABD=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$,又$DG=AD\times\tan\angle DAG=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$S_{四边形AGEF}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BEF}-S_{\triangle ADG}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{(\sqrt{3}-1)(3-\sqrt{3})}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$。

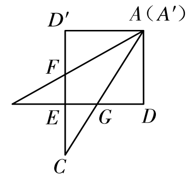

图19

评析:本题是常见的实践操作题,难点在于准确画出相应的图象,并结合分类讨论进行解题。解答时,学生需具备空间思维能力、猜测能力及逆向思考能力。

本文总结了中考中几类常见的几何问题,并逐一进行分析。各类问题虽然不尽相同,但均要求学生具备较强的逻辑思维能力和扎实的知识基础。因此,教师需引导学生在日常学习中积极总结,不断提升。

[参考文献]

[1] 高小梅.初中数学几何中的“从特殊到一般”思想[J].现代中学生(初中版),2024(6):15-16.

[2] 杨柳.巧用“等腰与旋转”解决几何问题[J].数理天地(初中版),2024(3):41-42.

[3] 魏庆雪.动态几何问题的解题探究[J].中学数学,2023(24):75-76.

[4] 许娜.初中平面几何中逆向思维的探究[J].数理天地(初中版),2023(19):6-7.

(责任编辑 黄春香)

搭建适切支架　优化通性通法　培养批判性思维

——以一道“平面向量数量积”习题的讲评为例

江苏省如皋市第二中学(226500)　潘建国

[摘　要]文章以一道“平面向量数量积”习题为例,具体阐述如何通过搭建适切的问题支架、工具支架和活动支架等来优化通性通法,从而培养学生的批判性思维。

[关键词]适切支架;通性通法;批判性思维

[中图分类号]　G633.6　　[文献标识码]　A　　[文章编号]　1674-6058(2024)35-0010-06

罗增儒教授认为“数学思维问题是数学教育的核心问题”[1]。斯托利亚尔在其著作《数学教育学》中指出:数学教学是数学(思维)活动的教学。他在列举数学教育目的时,把发展学生的数学思维放在第一位[2]。波利亚指出:“中学数学教学首要的任务就是加强解题训练。”他还有一句名言:“掌握数学就是意味着善于解题。”[3]解题教学不仅是运用知识与方法的有效途径,更是培养学生理性思维,尤其是批判性思维的重要平台。本文以一道“平面向量数量积”习题为例,聚焦条件的转化和方法的优化,具体阐述如何通过搭建适切的支架来优化通性通法,以有效培养学生的批判性思维。

一、通性通法分析

苏教版高中数学教材必修第二册给出了平面向量数量积的定义,即$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$,这也是求平面向量数量积的第一种方法——定义法。求平面向量数量积的第二种方法为坐标法,即$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$。由教材介绍的投影向量的概念,推导出$\vec{a}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{OA_1}\cdot\vec{b}=|\overrightarrow{OA_1}||\vec{b}|\cos\theta$(其中$\theta$等于0或$\pi$),这是求平面向量数量积的第三种方法——投影向量法。最后,根据平面向量基本定理,将未知的向量用已知的基底表示,再通过定义求解平面向量数量积,不妨称这种方法为第四种方法——基底法。

二、课堂教学过程

(一)引入习题

[例题]如图1,在平面四边形$ABCD$中,已知$AB=3$, $DC=2$,E,F分别是边AD,BC上的中点。若向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$的夹角为60°,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}$的值为_______。(改编自苏教版高中数学教材必修第二册第19页第7题)

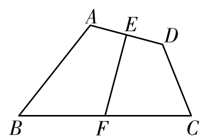

图1

设计意图:引导学生在复杂情境下运用定义法、基底法、投影向量法(针对特殊数据)、坐标法等多种方法并优化方法求平面向量数量积。

(二)开展教学

由于本题直接运用定义法不便捷,故主要采用基底法、坐标法、投影向量法和极限法求解。通过对各种方法的反复比较和深入分析,加深学生对平面向量数量积概念的理解,并优化他们对相关方法的运用。

1.优化通性通法

(1)优化基底法——善用比例点,从四边形走向三角形

生1:将$\overrightarrow{EF}$转化为$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{DC}$。$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF})=\overrightarrow{AB}\cdot\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{DC}\right]=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=6$。

[基金项目]本文系江苏省中小学教学研究第十五期专项课题“基于支架理论的高中生数学高阶思维培养的实践研究”(2023JY15-GL-L170)的阶段性成果。

师：这个方法实际上是将未知向量转化为基底向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$。也有一些同学连接EB，EC，利用平面向量基本定理得$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC})$，这样处理就方便多了。

师：在上述转化中最关键的结论是什么呢？

生齐：应该是$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$。

师：其实这是课本上的一个结论。（转向生2）你觉得上述解法如何？

生2：我想不到这个结论，但我肯定会尝试往这两个向量的方向去思考。

师：嗯，好的。那这道题还有没有其他解法呢？（稍作停顿）注意E，F的位置。

生3：连接BD，取BD的中点G，连接GE，GF，如图2所示。这样，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=6$。

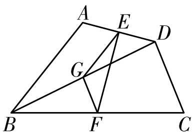

图2

师：你是怎么想到的？

生3：E，F是中点让我想起了初中学过的平面几何，这样构造中位线就可以了。

师：这个想法怎么样？（学生纷纷点头赞许）

师：借助中位线，我们可以将$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$平移到三角形EFG中，这样处理更快，且比第一种方法更直观、更易理解。

（2）优化坐标法——善用特殊角，从一般点转向特殊点

师：如果先利用“向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$的夹角为60°”这个条件，大家有没有什么联想？

（随机提问一名学生）

生4：这个夹角比较特殊，让我想到了建立坐标系，但是我没能成功构建出来。

师：那你觉得难在哪里？

生4：难在图中这个夹角并没有明显体现出来。

师：60°夹角在图中没有明显体现，那我们该如何处理呢？

（有学生提到可以延长线段，教师顺势在原图上延长BA，CD，使其交于一点）

师：请各小组讨论，看能否通过建立坐标系进行处理？

（2分钟后，课堂逐渐安静下来，各小组开始分别展示）

生5：为了便于计算，我将BA，CD延长线的交点设为坐标系的原点，并将AB置于x轴的正半轴上，建立如图3所示的坐标系。这样，D，C就在定直线$y=\sqrt{3}x$上。设$A(a,0)$，则$B(a+3,0)$，$\overrightarrow{AB}=(3,0)$，设$D(m,\sqrt{3}m)$，则$C(m+1,\sqrt{3}(m+1))$，由$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BF}$，分别求得$E\left(\frac{m+a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}m\right)$，$F\left(\frac{m+a+4}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}(m+1)\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(2,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=3\times2+0\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$。

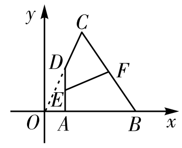

图3

师：大家觉得生5的思路怎么样？

（大部分学生投来赞许的目光）

师：看看，结果与m、a有关系吗？能否对生5的思路进行优化？

生6：其实不用那么麻烦。我们不妨令$A(1,0)$，$B(4,0)$，$\overrightarrow{AB}=(3,0)$，$D$，$C$在直线$y=\sqrt{3}x$上，令$D(1,\sqrt{3})$，由$DC=2$，可设$C(2,2\sqrt{3})$，由$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}\Rightarrow E\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AF}\Rightarrow F(3,\sqrt{3})$，所以$\overrightarrow{EF}=\left(2,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=3\times2+0\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$。

（教室内掌声响起）

师：你怎么会想到这样的建系方式呢？很特别，点A的坐标也太特殊了。

生6：我在分析过程中发现，图3中点A，D的位置并不明晰。为便于计算，我先假定点A的位置，记为$A(1,0)$，这样点B的位置也就自然确定了。D，C在定直线$y=\sqrt{3}x$上运动，结果仍然相同。基于这样的想法，我尝试把点D也放到特殊的位置上，于是就有了上述做法。

师：哪位同学愿意分享自己的学习体会？

生7：在建系的基础上对图形的位置进行特殊化处理，可以让运算变得更加简单。

师：很好，你的发现很有价值。这样，我们就可以把定性问题转化为定量问题，或者将一般的定量问题转化为更为精准的定量问题。

(3)优化投影向量法——善用化归路径，从常规图转向直观图

师：还有其他破题角度吗？

（学生感到很惊讶，原本以为对这道题的研究已经结束了，但教师的提醒又让他们的思绪回到了问题上）

师：我们已经读完了所有的条件，看来只能在题目要求的$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}$上找突破口了。

（教师再次提醒大家）

师：刚才我们已经分别用基底法和坐标法求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}$，大家还记得另一种方法叫什么吗？

生齐：投影向量法。

师：这个方法平时用得不多，因此不太容易成为我们的第一选择。今天，我们就来投投影，找找投影向量，看看能否有新的突破。

（教师开始巡视，观察学生的反应和解题进展）

师：我发现不少同学在原图上直接作投影，但似乎进行得不太顺利。确实，直接在原图上找投影向量不太直观。那么，你最习惯用什么样的方法来作投影向量呢？别忘了之前提到的"突破"常规哦。

生7（走到讲台前，在黑板上画了一个新的图形，标记为图4）：为了更直观地展示，我把其中较长的线段AB画平，然后根据平面向量数量积的几何意义来求解。我分别过点E,D,C,F向AB边作投影，垂足分别为点M,P,Q,N，则$\overrightarrow{EF}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影为$\left|\overrightarrow{EF}\right|\cos\theta=MN$，$MN=MP+PQ+QN$，$PQ=DC\cos 60^{\circ}=1$。又由相似比可得$\frac{AM}{MP}=\frac{AE}{ED}=\frac{BN}{NQ}=\frac{BF}{CF}=1$，所以$MP+NQ=\frac{1}{2}(AP+BQ)=\frac{1}{2}(AB-PQ)=\frac{1}{2}\times(3-1)=1$，所以$MN=1+1=2$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=3\times 2=6$。

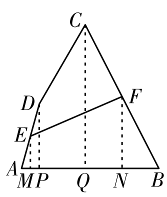

图4

（教室里响起一阵掌声）

师：哪位同学愿意谈谈对这个解法的思考？

生8：有点意外，但又合乎情理。

师：此话怎讲？

生8：说意外，是因为我们平时不太习惯直接运用平面向量数量积的几何意义来解题，但从刚才的解题过程可以看出，这种方法确实很方便，也很合乎情理。因为平面向量数量积的几何意义正是其定义的重要组成部分，也是我们处理平面向量问题的一种重要手段，我们确实应该多往这个方向去思考。

生3（突然插话）：如果是这样的话，我刚才的做法还可以再优化一下。因为在图2的$\triangle EGF$中$\angle EGF=120^{\circ}$，$EG=\frac{3}{2}$，$GF=1$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EF}$，只要用投影向量法就能立即得到答案$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EF}=2\times\frac{3}{2}\times(EG+GF\cdot\cos 60^{\circ})=2\times\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}+1\times\frac{1}{2}\right)=6$。

师：看来大家收获不断呢！生3已经能够灵活运用生7的方法去优化自己的解法，非常难得。

师：其实，我在批阅作业时也发现有同学有这样的想法。可能是受到原题中图形形状的影响，导致直观性得不到体现，解题过程受阻。因此，将图形转换到合适的状态，能更直观地分析问题。大家要重视这一现象，学会灵活运用不同的方法去解决问题。

(4)巧用极限法——善用影响度，从常规图转向极限图

师：还有没有其他思路？请大家再次突破自己认识的局限，仔细揣摩图3的作图细节，看看能否有新的发现。别忘了，这只是一道填空题（边说边将目光投向图3，并用手势张合来辅助说明）。

生9：我发现在图3中，AD的长短对计算结果影响不大。

师：你有什么具体的想法吗？

生9：我索性取AD为0（即让A,D,E重合），得到图5。大家一起来试算一下，看看结果会怎么样。此时$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\times 9+\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\frac{1}{2}=6$。

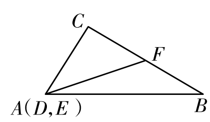

图5

师：这用的是什么方法？

生齐：极限法。

师：极限法我们之前提到过，它看似简洁，但并不是所有的问题都能用这种方法解决。

师：同学们，刚才大家从多个角度对这道向量题进行了深入剖析，让它焕发出了新的光彩，展现出了独特的魅力。同时我们也从中体会到了深入

分析和合作交流的重要性。

师(反问):如果将例题中的F点由BC上的中点改为靠近点B的三分之一点(如图6),其他条件不变,能求出$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}$的值吗?

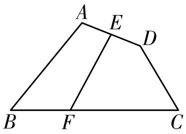

图6

(学生纷纷开始讨论)

生10(兴奋地):我用极限法做出了,答案是7。(下面有不少学生附和)

生11(平静地):我是用生1提到的基底法做的,但只化到$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF})=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB})+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=6+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$,就再也算不下去了。

生12(面露难色):我想用生3所说的基底法来做,但无法将三条边整合到一个三角形中,所以解不出来。

生13:我是用生6所说的特殊建系方法计算的,解出来的答案也是7。

生14:我是用生5所说的一般建系方法计算的,但在计算过程中发现$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{m}{6}+\frac{a}{6}+\frac{7}{3},-\frac{\sqrt{3}}{6}m+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(3,0)$,所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=-\frac{m}{2}+\frac{a}{2}+7$,但由于$m$与$a$的关系不确定,因此无法得出确切的结果。

(只有少数学生使用投影向量法)

师:现在出现了两种观点,一种认为有解且答案为7,另一种则认为无解。那么这道题到底能不能解?为什么?我们来反思一下上述解法,看看哪种是通性通法。

师:我们回看一下,为什么生12不能将三条边整合到一个三角形中?为什么生14不能算出$-\frac{m}{2}+\frac{a}{2}$的具体值?问题的根源在哪里?各小组讨论一下。

(几分钟后)

生12:我明白了,因为在选择基底时,所选的两个对应比例点的系数不一样,所以无法将三条边整合到一个三角形中。

师:对的。正是例题中的两个比例点系数一样,才使得那些“妙手”级解法能够发挥作用。因此,解题时要认真审题,扎实掌握“本手”级解法,即基础解法,同时分析出“妙手”级解法能否在特定情境下使用,而不能机械地模仿,否则可能会让“妙手”变“俗手”。

2.反思通性通法

师:刚才大家开动了脑筋,用多种方法解决了例题,真不错。现在,大家有什么心得体会呢?你们觉得哪种方法比较好?大家先小组内交流一下,稍后派代表进行分享。

生13:我觉得基底法虽然有点复杂,但只要目标明确,还是可行的。如果对应比例点的系数一样,把三条边整合到一个三角形中求解更好。若题目中有特殊的角度,则优先考虑坐标法。

生14:我觉得投影向量法也很简洁明了,关键是要有这个意识。至于极限法,虽然它很好用,但具有一定的特殊性,使用时要特别小心,以免出错。

生15:我觉得每一种方法都是基础且重要的,但关键是要根据实际情境灵活使用。当条件不足时,我们要想方设法转化条件再对应使用。

师:生13和生14两位同学对各种方法进行了简要评价,而生15则讲得更深刻。他提到我们在面对复杂问题时,要强化解题意识,善于开动脑筋,积极创设条件,灵活运用各种方法。

3.开展变式训练

【变式题】如图7,已知平面凸四边形$ABCD$,点E,F分别在AD和BC上,满足$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{ED}$,$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FC}$,且$EF=2$,$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$,设$AB=m,DC=n$,则$m+2n$的最大值为______。(改编自例题,难度适中)

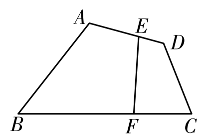

图7

设计意图:本题作为例题的引申,涉及的解题方法与例题相似但有所完善。只要在其中选择一种较为快捷的方法,便能得到m与n的一个关系式,再运用基本不等式进行求解即可。本题虽然从表面上看并未直接涉及平面向量数量积,但实际上蕴含着平面向量数量积的运算。

分析:运用上述解题方法求解,都能得到$m^2+4n^2+2mn=36$,其中最为快捷的当属“妙手”级解法——极限法。因为$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{ED}$,$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FC}$,满足$E$,

F分别在AD和BC上的对应位置一致(比例点的系数一样),所以利用基本不等式即可得到答案$4\sqrt{3}$(限于篇幅,此处不再详述具体过程)。

4.进行跟踪训练

(1)已知正三角形ABC的边长为2,D是BC的中点,E是BC的一个三等分点,求$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$。

(2)已知平面凸四边形$ABCD$,P,Q分别是对角线AC和BD的中点,设$BC=m$,$AD=n$,$\overrightarrow{CB}$与$\overrightarrow{AD}$的夹角为$\frac{\pi}{2}$,$PQ=1$,则$m+n$的最大值为______。

设计意图:上述训练题(1)(2)是例题和变式题的跟踪训练,旨在让学生进一步掌握解题方法,练就解题技能,并落实"四基"和"四能"要求。

三、课堂教学反思

本课的核心在于重点培养学生的批判性思维。批判性思维是一种科学且具有反思性的思维方式,它始于质疑与提问,通过搜集证据、分析推理,最终得出有说服力的结论[4]。批判性思维能力要求学生在面对各种复杂问题时独立思考、勇于质疑,运用已有知识进行审慎思考、分析推理,得出可靠的结论。批判性思维不仅是一种重要的能力素养,更是理性思维的高度体现[5]。值得注意的是,批判性思维并非简单地否定,而是具有建设性地思考。

(一)在优化通性通法的过程中培养批判性思维

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称《课标》)明确指出:评价内容包括解决问题的方法是否为通性通法[6]。因此,解题教学应立足于通性通法,这是培养学生"四基"和"四能"的重要基石。面对难度稍高的问题,教师应引导学生深入理解题意、克服困难、不断改进方法并寻求突破,培养他们的批判性思维。

本课介绍的前三种解法均为求解平面向量数量积的通性通法,但其直接应用均存在一定难度。第一种方法基底法需学生将$\overrightarrow{EF}$转化为$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{DC}$,虽题目已给出线段的长度和角度,但解答过程相对烦琐。然而,观察发现E,F的位置特殊,是两条不同线段上比例系数相同的点,可利用平面几何知识将$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{DC}$平移至同一个三角形内,从而优化了基底法。学生尝试的第二种方法是坐标法,即建立坐标系进行求解。然而,本题中直接建立坐标系存在困难,原因在于60°不是四边形的内角,四边形的内角并不清楚,为此,生5、生6构造了一个三角形并将一般点位置A、D转化为特殊点位置,从而优化了坐标法。第三种方法是投影向量法,部分学生尝试运用但未成功,主要原因是原图作图不直观。经分析,将常规图转换成直观图,可成功找到投影向量,从而优化投影向量法。这三种解法均是优化了的通性通法,能得出更贴合题意的通解。这一过程不仅形成了有效的解题模型,提高了学生的思维效率,更培养了学生的批判性思维。

极限法是一种常被忽视的通性通法。学生鲜少考虑此法,但经启发后,他们大胆改进,实现了突破。那么,极限法是否具有普适性呢?课上,教师通过稍微改变例题中点F的位置,有的同学得出了"结果",但经其他方法验证后发现这一结果是错误的,这让学生对极限法的使用条件有了深刻的理解,很好地培养了他们的批判性思维。

(二)在适切支架的助力下培养批判性思维

布鲁纳和罗斯用"支架"来隐喻在学习中,更有能力的他人为学习者提供的有效指导或干预。笔者认为,教学中的"支架"是教师根据学情,为帮助学生掌握新知识、提高新认识、训练新技能等而特别设计的辅助工具,一旦学习任务完成即可撤去。因此,在适切支架的助力下,能够更有效地培养学生的批判性思维。

本课主要运用了三种支架:问题支架、工具支架和活动支架。

在"注意E,F的位置"的启发下,学生由中点联想到中位线,成功将研究对象从四边形转化为三角形,从而顺利解题。

在"结果与m、a有关系吗?能否对生5的思路进行优化?"的提醒下,学生将A,D位置特殊化($AD\perp AB$),考虑到题目为填空题,学生甚至直接预设了坐标,极大地减少了运算量。

在"你最习惯用什么样的方法来作投影向量呢?别忘了之前提到的是'突破'常规哦"的暗示下,学生成功地将常规图转化为直观图,从而快速地找到了投影向量。

在"仔细揣摩图3的作图细节,看看能否有新的发现。"的引导下,学生观察到AD的长度对计算结果的影响不大,这一发现为他们大胆突破提供了

依据。

在“如果将例题中的F点由BC上的中点改为靠近点B的三分之一点，其他条件不变，能求出$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}$的值吗?”的反问下，学生由喜悦回归理性，再次探寻问题的本质。

这五个问题支架的巧妙搭建，有效促进了学生的理性思维，特别是批判性思维的培养。

在本课，教师运用了工具支架，特别是适时绘制的符合题意的图形，这些图形构成了研究问题的关键载体。从四边形到三角形，从一般坐标系到特殊坐标系，从常规图到直观图，再到极限图，教师结合这些工具进行解题分析，从而有效培养学生的批判性思维。

此外，在构建合理的坐标系的过程中，以及在运用极限法解答变式题出现答案分歧时，教师根据学情安排了小组活动。学生在充分思考的基础上进行组内思维碰撞，相互启迪，积极反思。这样既便于较快地发现问题本质，又为培养批判性思维提供了有力支持。

(三)在多元化评价中培养批判性思维

《课标》指出：教学评价是数学教学活动的重要组成部分。教学评价的主体应多元化，在多元评价的过程中，要重视教师与学生之间、学生与学生之间的沟通交流，努力营造良好的学习氛围[7]。

本课教学过程中的即时评价是应时而生的。有教师对学生思路的认可，有学生对同学思考的简单认可，有学生对四种解法的中肯评价，更有教师分享的对每一种解法的深刻理解。

此外，本课还设计了随堂的针对性变式训练和可延时的跟踪训练，作为展现学生的学习成效的评价方式。学生在实践中展示所学，反思问题，进一步培养了批判性思维。

笔者认为，教师对学生课堂表现的即时有效的评价是推进学生批判性思维培养的关键手段，它能促使学生深刻反思、深入再思。然而，评价要避免泛化，不能简单停留在好与不好、对与不对、优与不优的表面判断上，应触及问题的本质，以促进学生思维的发展。比如，在坐标法的优化过程中，学生的评价体会是“在建系的基础上对图形的位置进行特殊化处理，可以让运算变得更加简单”，而教师则从更深层次进行评价指导，指出“可以把定性问题转化为定量问题，或者将一般的定量问题转化为更为精准的定量问题”。又如，在极限法的变式练习中，当学生简单地模仿例题得到答案“7”，但用其他方法验算难以得到相同答案时，教师的评价直接点出了问题的症结所在：“例题中的两个比例点系数一样”，并强调“解题时要认真审题，扎实掌握‘本手’级解法，分析出‘妙手’级解法能否在特殊情境下使用，而不能机械地模仿，否则可能会让‘妙手’”变‘俗手’”。这样的评价进一步促进了学生批判性思维的形成。

另外，教师还需创设生态课堂的教学情境，以促使学生敢于发言、乐于分享，真实地表达自己的想法，并获取第一手反思评价的素材。同时，这也是培养学生批判性思维的重要前提和基础。

综上可知，本节课虽仅围绕一道填空题展开讲评，但其价值远超一题多解。笔者认为，解题教学的立足点在于通性通法，核心在于通过搭建适切的支架来优化这些方法，而最终目的在于培养学生的理性思维，尤其是批判性思维。

[参考文献]

[1] 罗增儒.数学解题学引论[M].2版.西安：陕西师范大学出版社，2001:11.

[2] 斯托利亚尔.数学教育学[M].北京：人民教育出版社，1984:28.

[3] 波利亚.数学的发现：第二卷[M].刘景麟，曹之江，邹清莲，译.呼和浩特：内蒙古人民出版社，1982:序言.

[4] 中国高考报告学术委员会.中国高考报告：2024[M].北京：新华出版社，2023:174.

[5] 中国高考报告学术委员会.中国高考报告：2023[M].北京：新华出版社，2022:145.

[6][7] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准：2017年版2020年修订[M].北京：人民教育出版社，2020:84-86.

(责任编辑　黄春香)